Отчет

Вторая ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ

Даниил Игнатьев

Выполнил:  
Игнатьев Даниил  
Студент группы 3630102/80004

Оглавление

[Формулировка задачи и ее формализация. 3](#_Toc24668212)

[Постановка задачи. 3](#_Toc24668213)

[Алгоритм метода и условия его применимости. 3](#_Toc24668214)

[Предварительный анализ задачи. 4](#_Toc24668215)

[Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности. 5](#_Toc24668216)

[Модульная структура программы. 7](#_Toc24668217)

[Последовательность работы программы: 7](#_Toc24668218)

[Численный анализ. 9](#_Toc24668219)

[Вывод. 13](#_Toc24668220)

[Приложение. 14](#_Toc24668221)

# Формулировка задачи и ее формализация.

Решение СЛАУ AХ=В посредством LU-факторизации, т. е. разложения квадратной матрицы на и , где A = LU.

Проверить вычислительную ошибку (сравнивая с точным решением) для матриц с разными числами обусловленности. Исследовать зависимость погрешности от возмущения первоначальных данных.

# Постановка задачи.

Дано точное решение Х. Решим систему линейных алгебраических уравнений   
АХ = В методом LU-факторизации. Получим приближенное решение Х\_new.

# Алгоритм метода и условия его применимости.

1. Создаем матрицы

A – данная матрица , b – вектор правой части.

L = – единичная матрица размера NxN.

1. Вычисляем L и U
2. Заменяя A = LU, получим эквивалентное уравнение:

Введя вектор вспомогательных переменных y, последнее можно переписывать в виде системы:

Ly = b,

Ux = y

Таким образом, решение данной системы с квадратной матрицей коэффициентов свелось к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами коэффициентов.

Условия применимости:

Необходимо отличие от нуля диагональных элементов матрицы U, поскольку на них выполняется деление в формуле , где Отсюда требование, накладываемое на главные миноры. Вместо проверки на равенство нулю главных миноров данной матицы удобнее делать такую проверку для элементов в процессе их вычисления.

# Предварительный анализ задачи.

**В требование к разложению** - главные миноры не равны нулю, чтобы удовлетворить этому требованию, генерируем диагональную матрицу с ненулевыми элементами на главной диагонали, умножаем ее на ортогональную транспонированную матрицу слева и справа на ту же не транспонированную матрицу.

Дальше будет необходимо генерировать матрицы с определенным числом обусловленности: определенного числа обусловленности можно добиться меняя один диагональный элемент, при этом держа один равный 1.

***Пример и создание матрицы с заданным cond (п.2):***

1. Пусть задано число обусловленности С.
2. Возьмем единичную матрицу M размера n.
3. Каждый элемент на главной диагонали домножим на число   
   a = .  
   После всех операций cond(M) = C.
4. Затем зададим случайный вектор W и построим ортогональную матрицу H  
   H =
5. Тогда получим матрицу A с заданным числом обусловленности C по формуле

***Пример плохо обусловленной матрицы (п.3):***

Матрицы Гильберта являются стандартным примером плохо обусловленных матриц.

# **Тестовый пример с детальными расчетами для задачи малой размерности.**

Пример №1. Для матрицы А выполнить LU-разложение.

1. Создаем матрицы

B =

A = U =

L =

1. Убеждаемся в отличие от нуля главных миноров данной матрицы.

det(A3) = 36 – 9 – 52 – 27 +24 +26 = -2 != 0  
det(A2) = 6 +4 = 10 != 0

1. Вычисляем

,

Проверка:

Проверка:

# Модульная структура программы.

1. Функция LU: раскладывает матрицу А на матрицы L и U, такие, что LU=A.

- входные параметры: double\*\* A, double\*\* L, double\*\* U, int n

n – размер матрицы

- выходные параметры: double\*\* L, double\*\* U.

1. Функция Solve: решает СЛАУ, выполняя прямую и обратную подстановки для нахождения векторов х и у.

- входные параметры: double\*\* L, double\*\* U, double \*X\_new, double \*B, int n

- выходные параметры: double \*X\_new

1. Функция Show: печатает квадратную матрицу

-Входные параметры: double\*\* M, int n   
-Выходные параметры: void

1. Функция composition: вспомогательная функция для перемножения 2-х матриц. Использовалась для проверки верности LU-разложения.  
   -Входные параметры: double\*\* R, double\*\* L, double\*\* U, int n   
   -Выходные параметры: double\*\* R

Примечание: Функции принимают на вход только указатель на матрицы, что позволяет сэкономить память и время и работать с матрицами напрямую. Поэтому все входные параметры-указатели так же являются и выходными.

# Последовательность работы программы:

Пункт 1:

В матлабе создается матрица с заданным cond (log(cond) = 1…10).  
После каждого создания матрицы вычисляется ее правая часть по заданному решению (Х) и они передаются в программу, написанную на Си.   
Она считает новые корни СЛАУ (X\_new) и с помощью LU-разложения и передает их обратно матлабу.  
Он их обрабатывает, считает нормы и отмечает 2 точки на графике.   
Затем процесс повторяется с новой матрицей. И так пока cond<10^10.  
Строится график №1.

Пункт 2:

Пятьдесят раз создается матрица для каждого cond. (log(cond) = 4, 7, 10)  
Считается по точному решению Х правая часть.   
Копируется и в скопированную вносится погрешность в размере 2-5%.  
Матрица и измененная правая часть передаются программе на Си, она считает корни и возвращает матлабу.  
Матлаб обрабатывает приближенные корни и строит одну точку на графике для каждой матрицы. Получается 3 графика с 50 точками на каждом.  
Графики(2-4)

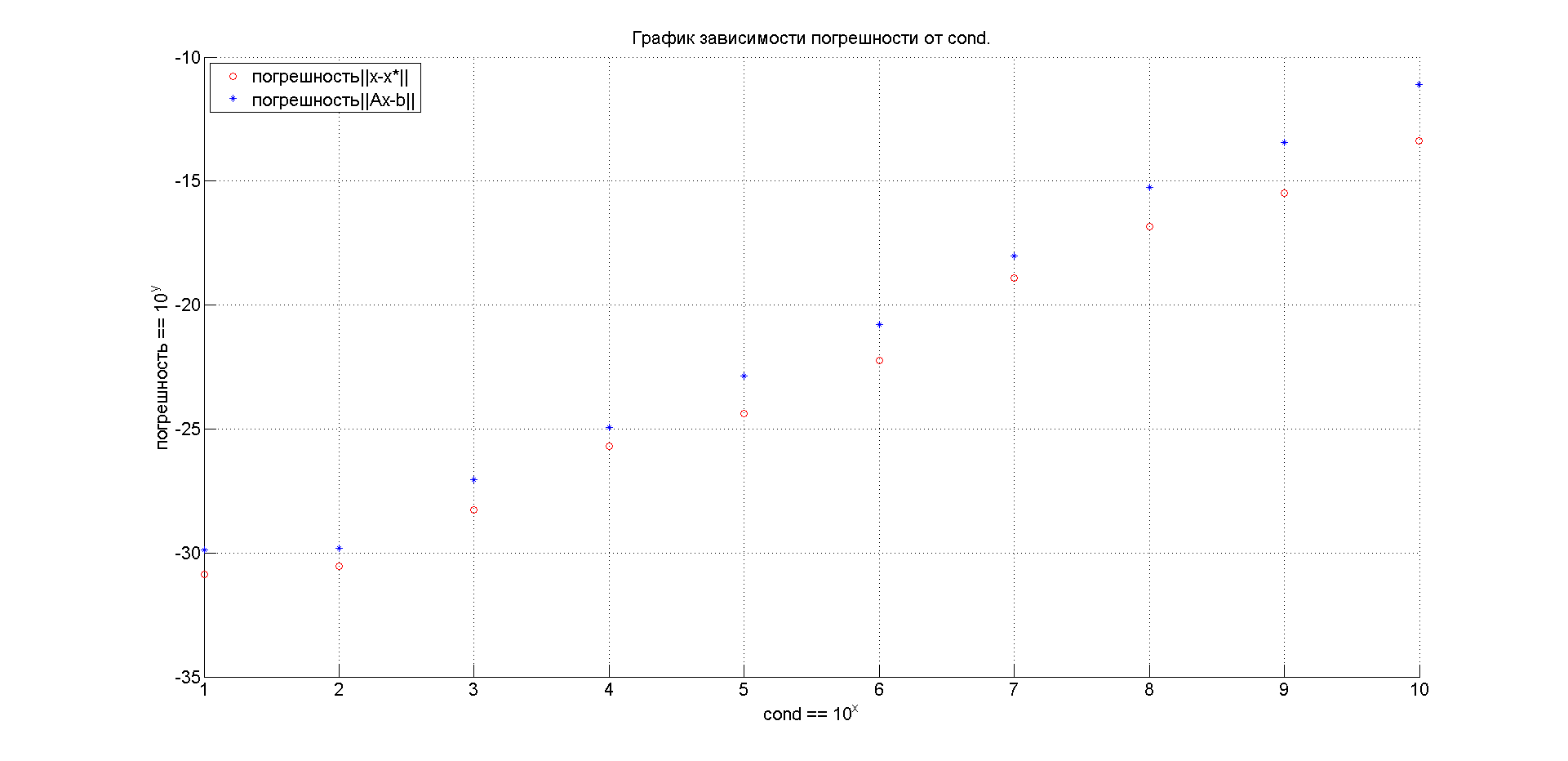
Пункт 3:

В матлабе создается матрица Гильберта размером 4,7 и 10 элементов.  
Аналогично предыдущему пункту, вносится погрешность в правую часть и передается в программу, написанную на C.   
Она считает новые корни и передает их обратно матлабу, который в свою очередь их обрабатывает, считает нормы и строит графики.

Проводится по 30 вычислений корней с различной погрешностью в правой части.  
Получается 3 графика с 30 точками на каждом. (Графики 5-7)

# Численный анализ.

Пункт 1.



При малых cond порядок погрешности невязки и корней почти не меняется.   
При cond <10^7 линии зависимости ведут себя одинаково, однако, начиная с 10^8 можно заметить небольшое расхождение этих линий.  
Так же можно заметить доминирование линии невязки над линией корней.

Пункт 2.

Внесение возмущений в правую часть:

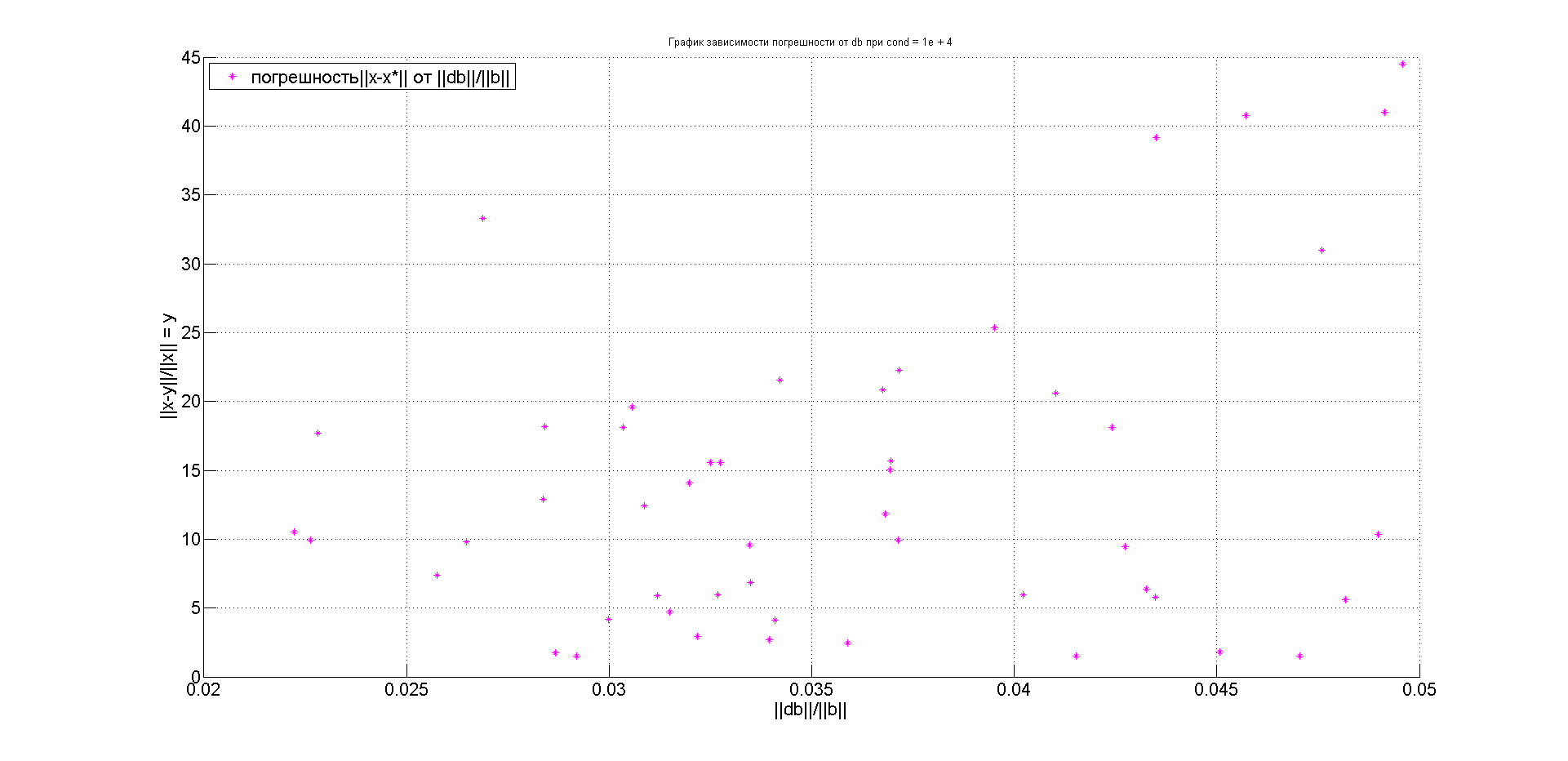
Где k1 – случайный коэффициент от 1,02 до 1,05.

В данном пункте рассмотрим 3 случая, когда

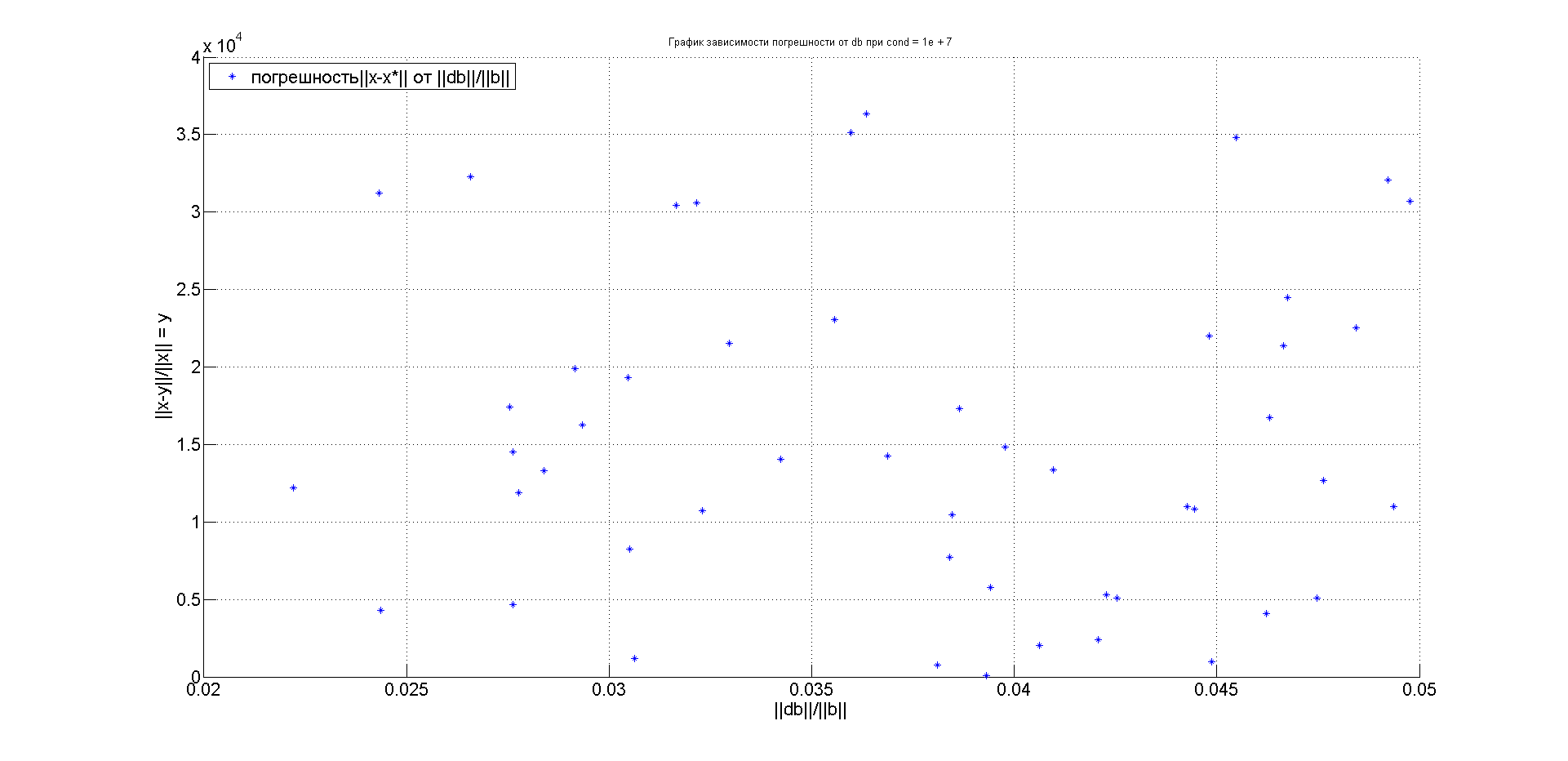
Для каждого случая произведем по 50 вычислений различных СЛАУ.

Результат работы этого пункта представляется в виде 3-х графиков,

представляющих влияние относительной ошибки вектора b на решение (п 2,3):

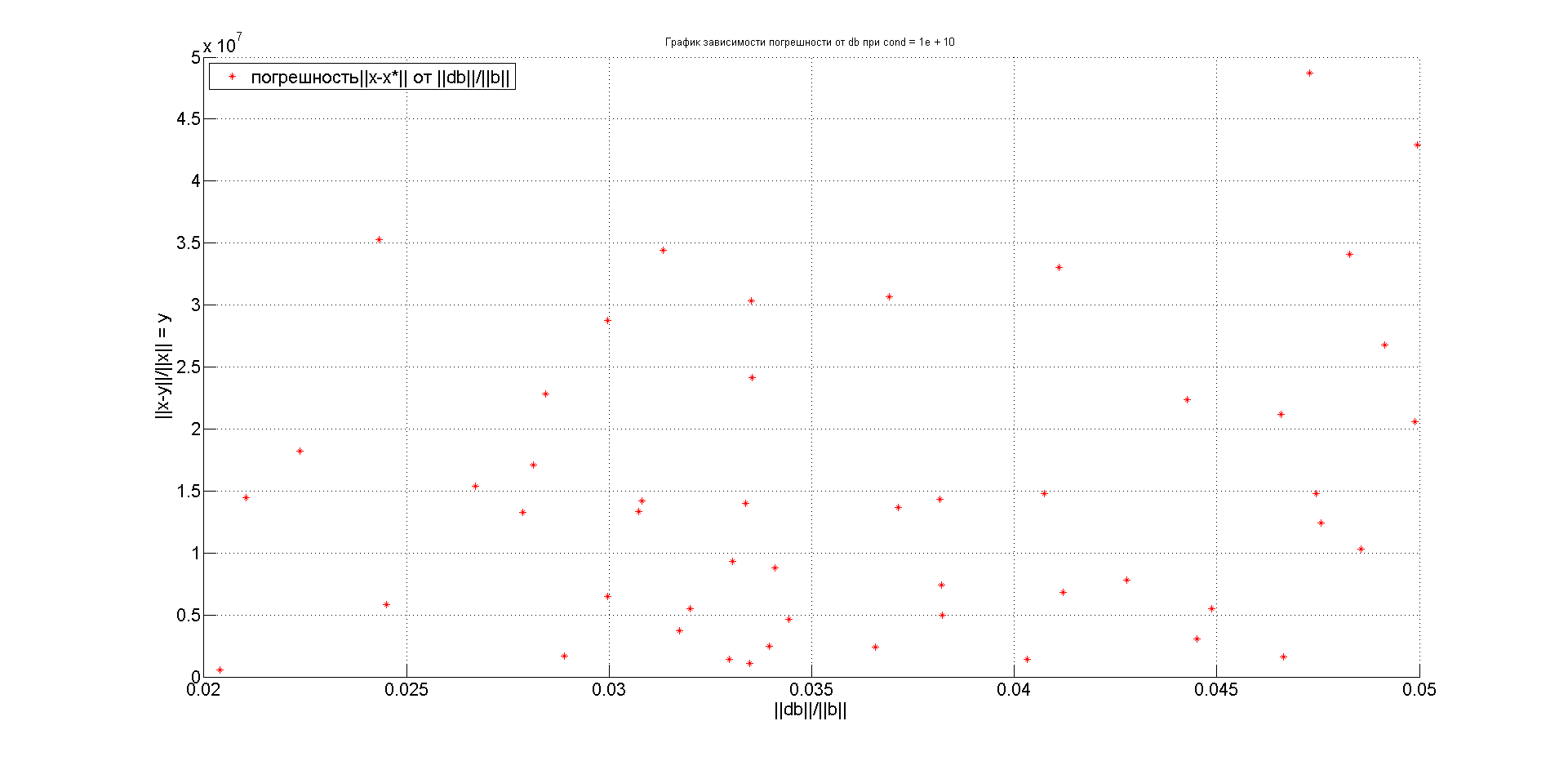


(Cond = 10^4)



(Cond = 10^7)

(Cond = 10^10)

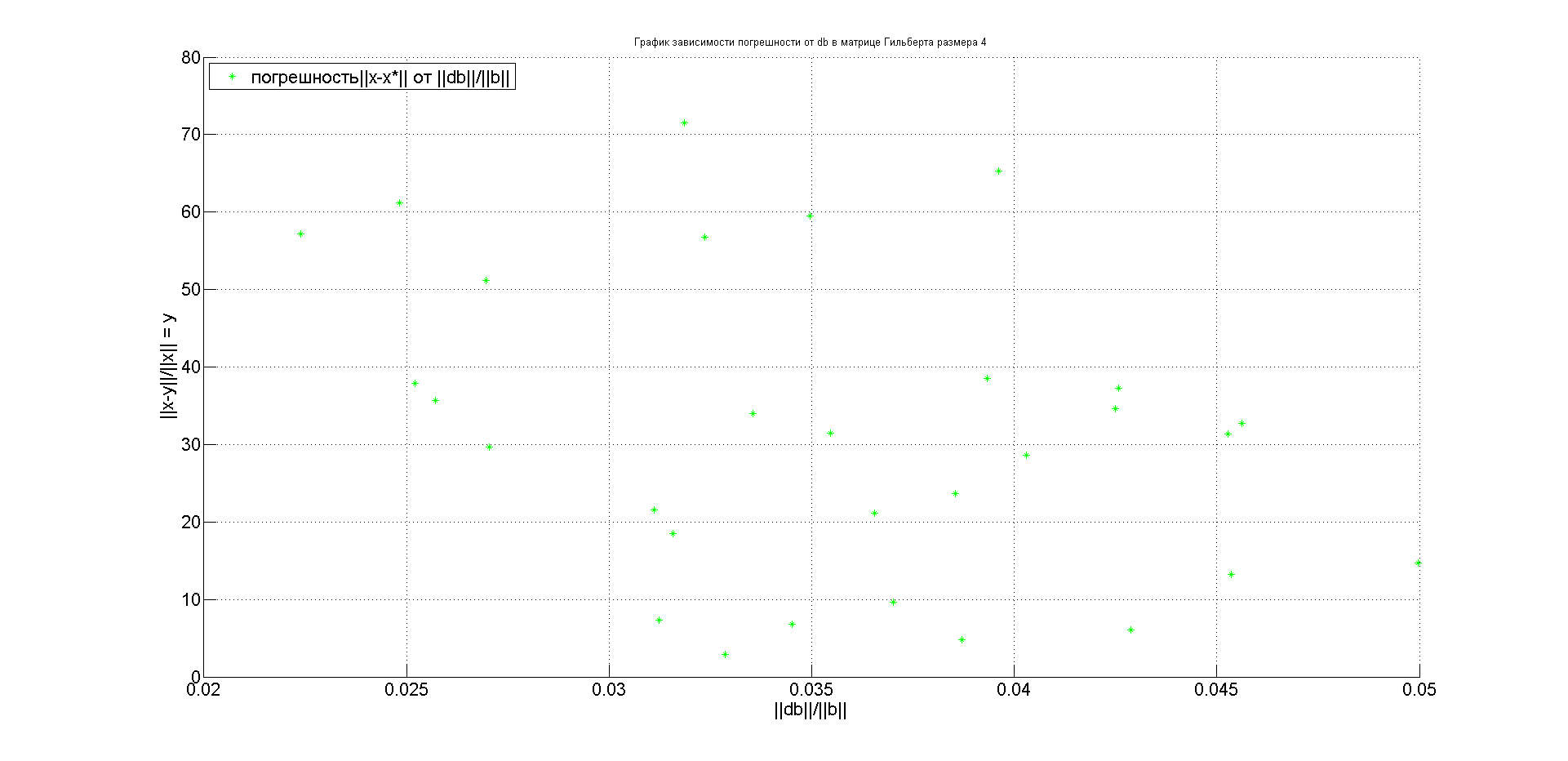


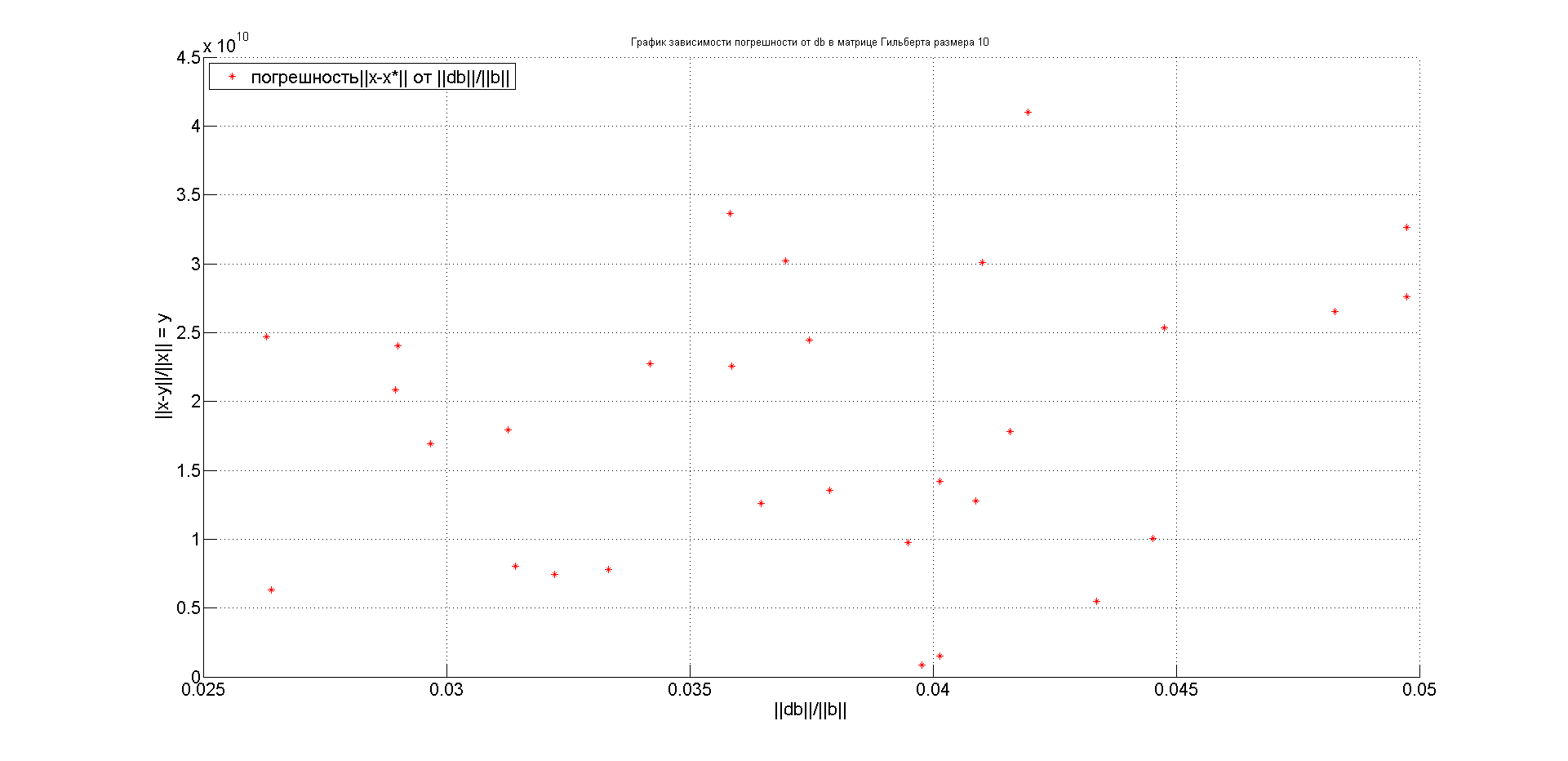
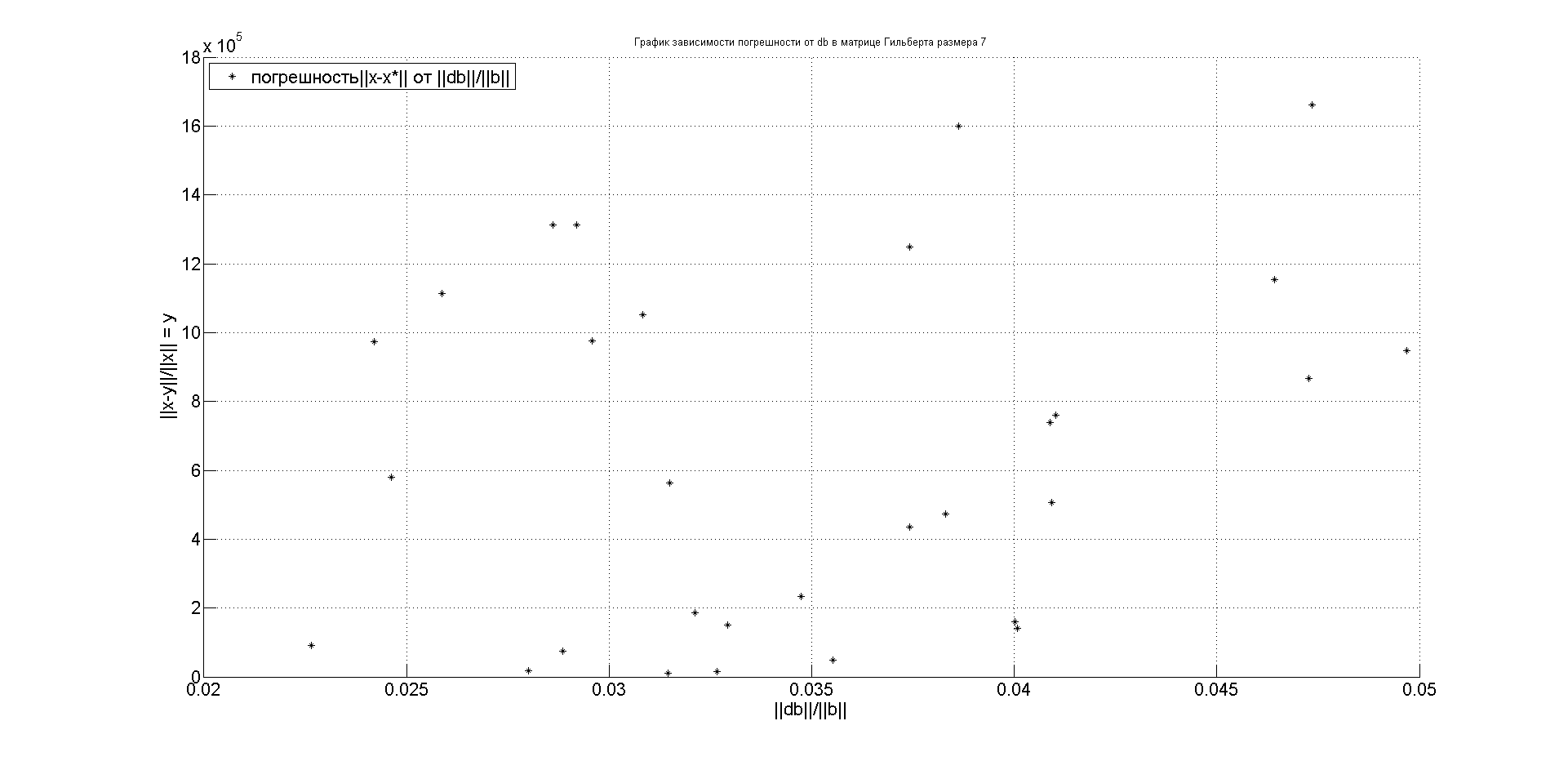
Заметим очевидную зависимость порядка погрешности от порядка числа обусловленности.

|  |  |
| --- | --- |
| Порядок числа обусловленности | Порядок погрешности |
| 4 | 1 |
| 7 | 4 |
| 10 | 7 |

На всех графиках видна зависимость среднего расстояния между соседними по вертикали точками. Чем больше коэффициент погрешности, тем больше расстояние.

Пункт 3.





В матрице Гильберта порядок погрешности больше, чем в предыдущем пункте.

Следовательно, для матриц Гильберта характерна очень плохая обусловленность.

|  |  |
| --- | --- |
| Порядок числа обусловленности | Порядок погрешности |
| 4 | 1 |
| 7 | 5 |
| 10 | 10 |

Заметим, что

# Вывод.

Решив методом LU-факторизации СЛАУ, мы обнаружили, что:

1. Внесение возмущения в матрицу А с высоким числом обусловленности вызовет очень большие изменения в Х*.*
2. Матрица Гильберта – типичный пример плохо обусловленной матрицы.   
   Поэтому такие матрицы будут плоховычислимы для неустойчивых методов.

# Приложение.

Рассмотрим взаимодействие программ на примере кода для второго пункта.

